EJERCICIOS APLICACIONES DERIVADAS **Ficha 4**

1.- **Estudia y representa la siguiente función:** $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

2.- **Representa la siguiente función, estudiando los aspectos que consideres más relevantes:** $f(x) = x^3 - 12x$

3.- **Estudia y representa la función:** $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$

4.- **Representa gráficamente la siguiente función, estudiando previamente los aspectos que consideres más relevantes:**

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

SOLUCIONES

1)

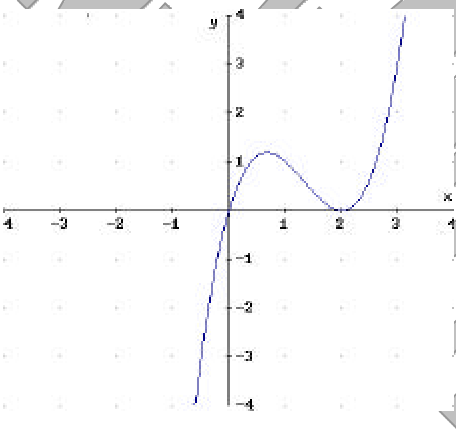
- $\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 4x^2 + 4x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 4x^2 + 4x) = -\infty$

- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \to x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = 0 \begin{cases} x = 0 & \to \text{Punto } (0, 0) \\ x = 2 & \to \text{Punto } (2, 0) \end{cases}$

Con el eje $Y \to x = 0 \to y = 0 \to$ Punto $(0, 0)$

- Puntos singulares:

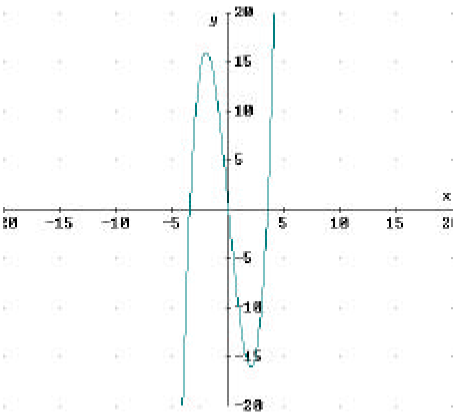


$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{6} = \frac{8 \pm 4}{6} \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Puntos $(2, 0)$ y $\left(\frac{2}{3}, \frac{32}{27}\right)$.

2)

- $\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 12x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 12x) = -\infty$
- Puntos de corte con los ejes:



Con el eje $X \to x^3 - 12x = x(x^2 - 12) = 0 \begin{cases} x = -\sqrt{12} \to \text{Punto } (-\sqrt{12}, 0) \\ x = 0 \to \text{Punto } (0, 0) \\ x = \sqrt{12} \to \text{Punto } (\sqrt{12}, 0) \end{cases}$

Con el eje $Y \to x = 0 \to y = 0$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \to \text{Punto } (-2, 16) \\ x = 2 \to \text{Punto } (2, -16) \end{cases}$$

3) • Dominio $= \mathbf{R} - \{1\}$

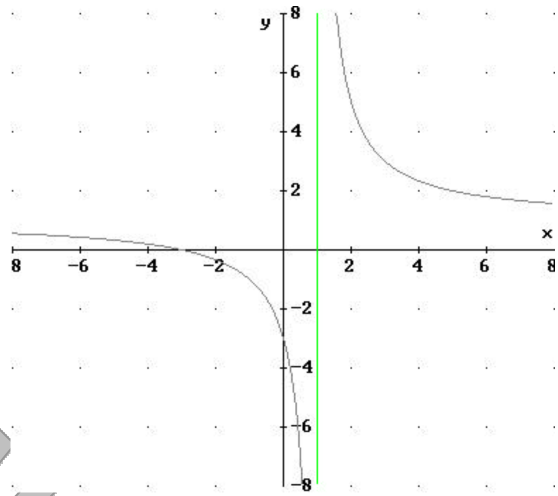
- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \dfrac{x+3}{x-1} = 0 \Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \rightarrow$ Punto $(-3, 0)$

  Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = \dfrac{3}{-1} = -3 \rightarrow$ Punto $(0, -3)$

- Asíntota vertical: $x = 1$

  $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$



  Asíntota horizontal: $y = 1$

  $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$, con $y > 1$

  $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$, con $y < 1$

- Puntos singulares:

  $$f'(x) = \frac{x-1-(x+3)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-3}{(x-1)^2} = \frac{-4}{(x-1)^2} \neq 0$$

  No tiene puntos singulares.

4)

- Dominio $= \mathbf{R} - \{-1\}$
- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \dfrac{x^2}{x+1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

  Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

- Asíntotas verticales: $x = -1$

  $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$

- Asíntota oblicua:

  $\dfrac{x^2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1} \Rightarrow y = x - 1$ es asíntota oblicua.

  Si $x \rightarrow +\infty$, $\dfrac{1}{x+1} > 0 \Rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

  Si $x \rightarrow -\infty$, $\dfrac{1}{x+1} < 0 \Rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.

- Puntos singulares:

  $$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

  $$f'(x) = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{Punto } (0, 0) \\ x = -2 \rightarrow \text{Punto } (-2, -4) \end{cases}$$